Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA A VII-a, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Problema 1. Fie m şi n numere naturale nenule cu proprietatea că 5 divide $2^n + 3^m$. Să se arate că 5 divide $2^m + 3^n$.

Soluţie Ultima cifră a puterilor lui 2 şi 3 se repetă din 4 în 4, deci vom considera $m = 4k + a$ şi $n = 4p + b$, cu $a, b = 0, 1, 2, 3$. . . . . **1 punct**

Ultima cifră a lui 2^n este 2,4,8,6 pentru $b = 1, 2, 3, 0$ respectiv, iar ultima cifră a lui 3^m este 3,9,7,1 pentru $a = 1, 2, 3, 0$ respectiv. . . . . **2 puncte**

Numărul $2^n + 3^m$ are ultima cifră 5 în următoarele cazuri:
i) $a = 2, b = 0$;
ii) $a = b = 1$;
iii) $a = 0, b = 2$;
iv) $a = b = 3$. . . . . **2 puncte**

În toate cele 4 situaţii de mai sus ultima cifră a lui $2^m + 3^n$ este 5, ceea ce trebuia arătat. . . . . **2 puncte**

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care M şi N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC, iar S este un punct mobil pe latura (BC). Să se arate că $(MB - MS)(NC - NS) \leq 0$.

Soluţie. Fie D piciorul înălţimii din A. Atunci triunghiurile BDM şi DCN sunt isoscele, deoarece $MB = MD$ şi $NC = ND$. . . . . **2 puncte**

Dacă $S = D$, atunci $MB - MS = 0$, de unde rezultă cerinţa. . . **1 punct**

Dacă S se află pe segmentul (BD), atunci $MB > MS$ şi $NS > NC$, deci $(MB - MS)(NC - NS) < 0$. . . . . **2 puncte**

Analog dacă S aparţine segmentului (DC). **2 puncte**

Problema 3. Fie a şi b două numere naturale. Să se arate că numărul $a^2 + b^2$ este diferenţa a două pătrate perfecte dacă şi numai dacă ab este număr par.

Soluţie. Pentru implicaţia directă, presupunem prin absurd că numărul ab este impar. Atunci a şi b sunt numere impare, deci $a^2 + b^2$ este de forma $4k + 2$. . . . . **2 puncte**

Deoarece $a^2 + b^2 = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$, observăm că dacă m, n au aceeaşi paritate rezultă că $a^2 + b^2$ este multiplu de 4, iar dacă m, n au parităţi diferite găsim $a^2 + b^2$ impar, contradicţie.................**2 puncte**

Pentru implicaţia contrară, să observăm că $a^2 + b^2 = 4s$, dacă şi a şi b sunt pare, sau $a^2 + b^2 = 2r + 1$, dacă doar unul este par. ....**2 puncte**

În primul caz scriem $4s = (s + 1)^2 - (s - 1)^2$, iar în cel de-al doilea caz avem $(r + 1)^2 - r^2$, ceea ce încheie demonstraţia. ....**1 punct**

Problema 4. Se consideră un triunghi echilateral ABC. Punctele M, N şi P sunt situate pe laturile AC, AB şi BC, respectiv, astfel încât $\angle CBM = \frac{1}{2}\angle AMN = \frac{1}{3}\angle BNP$ şi $\angle CMP = 90°$.

a) Să se arate că triunghiul NMB este isoscel.

b) Să se determine măsura unghiului $\angle CBM$.

Soluţie. a) Fie x măsura unghiului $\angle MBC$. Atunci $\angle ABM = 60° - x$ şi $\angle NMB = 60° - x$, deci $NM = NB$. ....**2 puncte**

b) Fie Q un punct pe semidreapta $(CA$ astfel încât $CQ = 2 \cdot CA$. Atunci $\Delta QPC \sim \Delta BMC$ şi $QB \perp BC$. Înseamnă că $\angle PQC = x$. .... **1 punct**

Fie O mijlocul segmentului PQ. Cum PQ este ipotenuză comună în triunghiurile BPQ şi MPQ, rezultă că $OM = OB = \frac{1}{2} \cdot PQ$. Din $\angle BOM = 60°$ rezultă că triunghiul OBM este echilateral, deci $ON \perp BM$.... **1 punct**

Fie S şi T punctele de intersecţie ale dreptei BM cu PN şi PQ respectiv. Avem $\angle BTN = \angle QSM = 120° - 2x$, deci triunghiul PST este isoscel cu $PS = PT$. ....**1 punct**

Dacă $T \neq S$, perpendiculara din P pe segmentul TS taie dreapta ON, fiind bisectoarea unghiului $\angle NPO$, în contradicţie cu $ON \perp BM$. Rezultă $T = S$, deci punctele P, N, O, Q sunt coliniare. ....**1 punct**

De aici $PB = PM$ şi $x = \angle PBM = \angle PMB = 15°$. ....**1 punct**